Modelo con T periodos:

Problema del consumidor:

$$\max_{\substack{c_1,\dots,c_T \\ b_1,\dots,b_{T-1}}} \sum_{t=1}^{T} \beta^t u(c_t^i) \quad \text{s.a.}$$

$$c_1^i + b_1^i = y_1^i + (1+r_0)\, b_0^i$$

Hasta ahora Asumimos que $b_0^i = 0$.

De ahora en adelante asumimos que bo es exógeno

$$c_2^i + b_2^i = y_2^i + (1+r_1)\, b_1^i$$

$$\vdots$$

$$c_T^i + b_T^i = y_T^i + (1+r_{T-1})\, b_{T-1}^i$$

en equilibrio $b_T^i = 0$

En $t=T$: $\Rightarrow \quad c_T + b_T = y_T + (1+r_{T-1})\, b_{T-1}$

$$b_{T-1} = \frac{1}{1+r_{T-1}}\left(c_T + b_T - y_T\right)$$

En $t = T-1$: $\quad c_{T-1} + b_{T-1} = y_{T-1} + (1+r_{T-2})\, b_{T-2}$

$$c_{T-1} + \frac{1}{1+r_{T-1}}\left(c_T + b_T - y_T\right) = y_{T-1} + (1+r_{T-2})\, b_{T-2}$$

$$b_{T-2} = \frac{1}{1+r_{T-2}}\left(c_{T-1} - y_{T-1}\right) + \frac{1}{(1+r_{T-1})(1+r_{T-2})}\left(c_T - y_T\right)$$

En $t = T-2$: ...

$$\vdots$$

$$\boxed{c_1 + \frac{c_2}{1+r_1} + \frac{c_3}{(1+r_1)(1+r_2)} + \dots + \frac{c_T}{(1+r_1)\cdots(1+r_{T-1})} + \frac{b_T}{(1+r_1)\cdots(1+r_{T-1})} = b_0(1+r_0) + y_1 + \frac{y_2}{1+r_1} + \frac{y_3}{(1+r_1)(1+r_2)} + \dots + \frac{y_T}{(1+r_1)\cdots(1+r_{T-1})}}$$

restricción presupuestal intertemporal.

$$\max_{c_1,\dots,c_T} \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} u_i(c_t) \quad \text{s.a.} \quad c_1 + \frac{c_2}{1+r_1} + \dots + \frac{c_T}{(\dots)} + \frac{b_T}{(\dots)}$$

$$= y_1 + b_1(1+r_0) + \dots + \frac{y_T}{(\dots)}$$

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} u(c_t) + \underbrace{\sum_{t=1}^{T} \lambda_t \left(y_t + (1+r_{t-1}) b_{t-1} - c_t - b_t \right)}$$

$$\lambda_1 \left(y_1 + (1+r_0) b_0 - c_0 - b_0 \right) +$$

$$\vdots$$

$$\lambda_t \left(y_t + (1+r_{t-1}) b_{t-1} - c_t - b_t \right) +$$

$$\lambda_{t+1} \left(y_{t+1} + (1+r_t) b_t - c_{t+1} - b_{t+1} \right) +$$

$$\vdots$$

$$\left.\begin{aligned} [c_t]&: \beta^{t-1} u'(c_t) - \lambda_t = 0 \\ [b_t]&: -\lambda_t + (1+r_t)\lambda_{t+1} = 0 \\ [\lambda_t]&: y_t + (1+r_{t-1}) b_{t-1} - c_t - b_t = 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \lambda_t &= \beta^{t-1} u'(c_t) \\ \lambda_t &= \lambda_{t+1}(1+r_t) \\ \lambda_{t+1} &= \beta^{t} u'(c_{t+1}) \end{aligned}$$

$$\cancel{\beta^{t-1}} u'(c_t) = \beta^{\cancel{t}} u'(c_{t+1})(1+r_t) \quad (*)$$

T-1 eqs. ← $\boxed{u'(c_t) = \beta(1+r_t) u'(c_{t+1})}$ → ecuación de Euler

T eqs. ← $\boxed{y_t + (1+r_{t-1}) b_{t-1} = c_t + b_t}$ → restr. presupuestal $(*)$

→ $(T-1) + T$ ecuaciones $(2T-1)$ en $2T-1$ incógnitas:

$c_1, \dots, c_T$

$b_1, \dots, b_{T-1}$

El hogar ahorra 1 unidad de consumo (compra 1 bono) en el periodo 1 y lo reahorra cada periodo para consumir en el periodo t:

En $t=1$: $b_1 = 1$

En $t=2$: recibe $(1+r_1)\cdot 1$ y los reahorra: $b_2 = (1+r_1)$

En $t=3$: recibe $(1+r_1)(1+r_2)$ y lo reahorra: $b_3 = (1+r_1)(1+r_2)$

$\vdots$

En periodo t el hogar recibe $(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})$ para consumir

Equivalentemente, si el hogar ahorra $\frac{1}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})}$ en el periodo 1 $\Rightarrow$ en t recibe 1 unidad.

Si el individuo quiere aumentar su consumo en t en exactamente una unidad $\Rightarrow$ debe renunciar a $\frac{1}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})}$ unidades de consumo en periodo 1.

El precio del consumo en el periodo t en términos del consumo en periodo 1 es:

$$P_t := \frac{1}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})}$$

$$P_1 = 1$$

Restricción intertemporal:

$$\underset{=p_1}{1}c_1 + \frac{c_2}{\underset{=p_2}{1+r_1}} + \dots + \frac{c_T}{\underset{=p_T}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})}} + \frac{b_T}{\underset{=p_T}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})}}$$

$$= (1+r_0)b_0 + \underset{=p_1}{1}y_1 + \frac{y_2}{\underset{=p_2}{1+r_1}} + \dots + \frac{y_T}{\underset{=p_T}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})}}$$

$$\boxed{\sum_{t=1}^{T} p_t c_t + p_T b_T = \sum_{t=1}^{T} p_t y_t + (1+r_0) b_0}$$

La restr. intertemporal.

Problema del hogar:

$$\max_{c_1,\dots,c_T} \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} u(c_t) \quad \text{s.a.} \quad \sum_{t=1}^{T} p_t c_t + p_T b_T = \sum_{t=1}^{T} p_t y_t + (1+r_0) b_0$$

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} u(c_t) + \lambda\left[\sum_{t=1}^{T} p_t y_t + (1+r_0)b_0 - \sum_{t=1}^{T} p_t c_t + p_T b_T\right]$$

$\vdots$

$$u(c) = \ln c$$

$$\Rightarrow \boxed{c_t^*(r_1,\dots,r_{t-1}) = \frac{\beta^{t-1}(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})}{1+\beta+\dots+\beta^{t-1}}\left(\sum_{t=1}^{T} p_t y_t + (1+r_0)b_0\right)}$$

Equilibrio: • I individuos

• Un equilibrio son $(r_1^*,\dots,r_{T-1}^*)$ y $(c_1^*,\dots,c_T^*)$ tal que:

① c_t^{i*} es óptimo dados $(r_1^*, \ldots, r_{T-1}^*)$ $\forall t, \forall i$

② mercados se vacían:

mercado de bienes:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{I} c_1^{i*}(r_1^*, \ldots, r_{T-1}^*) &= \sum_{i=1}^{I} y_1^i \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^{I} c_T^{i*}(r_1^*, \ldots, r_{T-1}^*) &= \sum_{i=1}^{I} y_T^i \end{aligned}\right\} \text{T ecuaciones en T-1 incógnitas: } r_1^*, \ldots, r_{T-1}^*$$

mercado de bonos:

$$\sum_{i=1}^{I} b_t^{i*}(r_1^*, \ldots, r_{T-1}^*) = 0, \quad t = 1, \ldots, T-1$$

Por lo general este problema no es sencillo de resolver.

Supongamos que estamos en economía de agente representativo. En equilibrio: $\underline{b_t^{i*} = 0}$

Suponiendo $\underline{b_0 = 0}$:

$\Rightarrow \underline{c_t^{i*} = y_t^{i*}}$

$b_i > 0 \to$ i ahorrando

$b_j < 0 \to$ j endeuda

b^i es idéntico $\forall i$ en econ. de agente represen-

$\underline{\sum b_i = 0} \Leftrightarrow \underline{b_i} = 0$

Cond. de optimalidad: $u'(c_t) = \beta(1+r_t)u'(c_{t+1})$

$$\Rightarrow \quad 1+r_t = \frac{u'(c_t)}{\beta u'(c_{t+1})} \qquad \boxed{c_t^* = y_t}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{1+r_t^* = \frac{u'(y_t)}{\beta u'(y_{t+1})}}$$

$$u(c) = \ln(c) \quad \Rightarrow \quad \boxed{1+r_t^* = \frac{y_{t+1}}{\beta y_t}}$$

Choque transitorio al ingreso:

supongamos que el ingreso de hogar representativo en el periodo τ aumenta: $\Delta y_\tau > 0$, $\tau \geq 2$.

$$\Delta y_t = 0 \qquad t \neq \tau$$

$$1+r_\tau^* = \frac{y_{\tau+1}}{\beta y_\tau \uparrow} \downarrow \qquad\qquad 1+r_{\tau-1}^* = \frac{y_\tau \uparrow}{\beta y_{\tau-1}} \uparrow$$

Si y_τ aumenta $\Rightarrow$ hogar es más rico. $\Rightarrow$ va a querer consumir más antes y después de τ.

Para consumir más después de τ va a querer ahorrar.
$\Rightarrow$ la tasa de interés de eq. debe caer para desincentivar el ahorro en τ y que el mercado se vacíe.

Para consumir más en $\tau-1$ individuos se van a querer endeudar. Para que mercado de bonos se vacíe, tasa de interés $r_{\tau-1}^{i}$ debe aumentar para desincentivar la deuda.

$$P_\tau = \frac{1}{(1+r_1)\cdots(1+r_{\tau-1})\uparrow} \downarrow$$

→ bien en τ es relativamente más abundante
⇒ su precio de eq. cae

$$P_{\tau+1} = \frac{1}{(1+r_1)\cdots\underline{(1+r_{\tau-1}\uparrow)}\,\underline{(1+r_\tau\downarrow)}}$$

→ en eq $\uparrow r_{\tau-1}$ y $\downarrow r_\tau$ se cancelan y P_τ permanece constante.

Choque permanente: y_t aumenta en la misma proporción en todos los periodos:

$$1+r_t^* = \frac{\cancel{k}\, y_{t+1}}{\beta\, \cancel{k}\, y_t} = \frac{y_{t+1}}{\beta\, y_t}$$ → r_t no cambia.

Horizonte infinito:

- Individuos viven infinitos periodos.
- Dotaciones: $(y_1^i, y_2^i, \ldots)$, $y_t^i \geq 0$, $t \geq 1$
- $P_1 = 1$, $P_t := \dfrac{1}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})}$
- Preferencias: $\sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u(c_t)$
- Restricción presupuestal: $c_t^i + b_t^i = (1+r_{t-1})\, b_{t-1}^i + y_t^i$

En el caso de economía con T periodos, asumimos implícitamente que $b_T \geq 0$. En óptimo $b_T^* = 0$

Ahora NO existe periodo terminal!

Esquema de Ponzi:

Supongamos que el hogar consume en cada periodo exactamente su dotación.

De repente en el periodo 1 adquiere deuda X:

$$b_1 = -X$$

En $t=2$ debe pagar $(1+r_1)X$. Pide prestada esa cantidad:

$$b_2 = -(1+r_1)X$$ → Hacer rollover de la deuda.

En $t=3$ debe pagar $(1+r_1)(1+r_2)X$. Pide prestada:

$$b_3 = -(1+r_1)(1+r_2)X$$

$$\vdots$$

En t individuo debe $\underline{(1+r_1)(1+r_2)\cdots(1+r_{t-1})X}$

La deuda crece en tiempo hasta el infinito.

Bajo este esquema, el individuo satisface su restricción presupuestal.

Si no se impone restricción, decisión óptima del individuo es tomar deuda infinita en el primer periodo y hacer rollover por siempre.

Para que el problema del hogar esté bien definido, debemos imponer una restricción que prevenga que existan esquemas de Ponzi.